REVISTA IBERO-AMERICANA de Educación / de Educação

La sucesión de Fibonacci en los distintos campos conceptuales

Claudia Minnaard
Universidad Nacional de Lomas de Zamora. Argentina
Viviana Condesse
Universidad de Buenos Aires. Universidad Nacional de Lomas de Zamora. Argentina

Número 37/3
25-12-05

Introducción

La presentación de razonamientos matemáticos que provienen de referencias tomadas de la historia de esta disciplina, es para numerosos investigadores una forma de mejorar de manera notable la enseñanza a través de propuestas innovadoras y exitosas (Bagni, 2001).

Furinghetti y Somaglia (1997, citados por Bagni 2001) reconocen dos niveles de trabajo en la introducción de la historia aplicada a la didáctica: un primer nivel que se refiere a todo lo que intervenga y brinde motivación para estudiar matemática mediante la contextualización del ámbito social (geográfico, histórico, comercial, lingüístico) y un segundo nivel que recupera la dimensión cultural de la matemática como método.

De los posibles temas a elegir nos decidimos por abordar la sucesión de Fibonacci, tomando distintas perspectivas y contextos. ¿Por qué elegimos este tema?. Fundamentalmente, porque siempre provoca “sorpresa” en los alumnos, no en el sentido de sobresalto o desconcierto, si no en el sentido de sorprender, de incrementar la atención o crear un sentimiento participativo de admiración y satisfacción, un "¡ajá!" o un "¡eureka!". En otras palabras, sorpresa ante la belleza y las características de un objeto matemático, ante la aparición de una solución inesperada o ante el vínculo imprevisible entre ramas distintas del conocimiento (Alsina, 2000).

Hagamos un poco de historia

¿Quién fue Fibonacci? Leonardo de Pisa, mejor conocido por su apodo Fibonacci (que significa hijo de Bonacci) nació en la ciudad italiana de Pisa y vivió de 1170 a 1250. Su padre trabajaba como representante de la casa comercial italiana más importante de la época, en el norte de África. Este lo animó a estudiar matemáticas. Leonardo recibió este tipo de enseñanza de maestros árabes. Se convirtió en un especialista en Aritmética y en los distintos sistemas de numeración que se usaban entonces. Convencido de que el sistema indo-arábigo era superior a cualquiera de los que estaban en uso, decidió llevar este sistema a Italia y a toda Europa, en donde aún se usaban los numerales romanos y el ábaco. Escribió gran cantidad de libros y textos de matemáticas: *Liber Abaci* escrito en 1202, *Practica Geometriae* en 1220, *Flos* en 1225 y *Liber Quadratorum* en 1227. Es importante destacar que en esa época no existía la imprenta, por lo tanto los libros y sus copias eran escritos a mano. Fue sin duda el matemático más original de la época medieval cristiana.

Desarrollo

La experiencia se realizó con 60 alumnos de 2.· año de polimodal en las modalidades Ciencias Naturales y Gestión durante 3 horas reloj, repartidas en tres encuentros de una hora cada uno. Los alumnos concurren al turno mañana en un colegio de gestión privada del Gran Buenos Aires.

El trabajo que presentamos a nuestros alumnos tiene lugar luego de desarrollar el tema de sucesiones numéricas, es el "broche de oro" de la unidad en la que hemos definido sucesión como toda función con dominio en el conjunto de los números naturales, trabajando en el desarrollo de las mismas y en la búsqueda del término general, como así también en el reconocimiento de la convergencia.

En la primera de las actividades propuestas, llegamos a la definición de sucesión de Fibonacci, mediante un ejemplo distinto al clásico de los conejos, por parecernos más real y además factible de ser comparado con el propio árbol genealógico de cada alumno.

La segunda de las actividades plantea un problema geométrico, que implica realizar construcciones que, en algunos casos, ya han sido casi olvidadas. Además los induce a la relación de la matemática con otras ciencias, en este caso, las biológicas.

En la tercera actividad nos volcamos hacia la teoría de números, buscando sorprender a los alumnos a través de múltiplos y divisores, y regularidades entre los mismos.

Actividad 1

En todo colmenar hay un tipo especial de abejas llamadas "reina". Hay otro tipo, también hembras, que se llaman "trabajadoras" que a diferencia de las reinas no producen huevos. Hay abejas "machos" que no trabajan y que son engendrados por los huevos no fertilizados de las reinas, por lo tanto tienen madre pero no padre. Todas las hembras son engendradas por la unión de la reina con un macho, de manera que las hembras tienen padre y madre.

De acuerdo al relato anterior, te pedimos que:

a) Construyas el diagrama de árbol genealógico de una abeja macho, colocando al macho en la base del diagrama.

b) ¿Cuántos padres tiene?

c) ¿Cuántos abuelos?

d) ¿Cuántos bisabuelos? ¿y tatarabuelos? ¿y choznos?

e) Escribe una sucesión con los valores obtenidos de las respuestas anteriores. ¿Observas alguna particularidad?

f) Construye ahora el árbol genealógico de una abeja hembra, y responde las mismas preguntas anteriores ¿hay alguna similitud?

g) Construye tu propio árbol genealógico. ¿Se mantienen las mismas relaciones anteriores? ¿Por qué?

h) Escribe el término general de cada una de las sucesiones obtenidas.

Las dos primeras sucesiones, se conocen con el nombre de SUCESIONES DE FIBONACCI.

Actividad 2

a) Construye dos cuadrados de lado 1, que tengan un lado en común. Sobre ellos, construye uno de lado 2; a continuación otro que tenga por lado la suma de este último con el anterior. Podemos continuar agregando cuadrados de tal forma que cada uno tenga por lado la suma de los lados de los dos últimos cuadrados dibujados (agrega por lo menos cuatro más).

b) Este conjunto de rectángulos los llamaremos rectángulos de Fibonacci. ¿Por qué?

c) Construye una espiral sobre los cuadrados, dibujando 1/4 de la circunferencia inscripta en cada cuadrado.

d) Si bien matemáticamente no es una espiral, es una muy buena aproximación de la espiral que aparece en la naturaleza. Busca no menos de tres ejemplos que presenten esta espiral.

Actividad 3

En esta actividad vamos a conocer algunas particularidades de los números de Fibonacci. Para ello te pedimos que:

a) Escribe por lo menos los treinta primeros términos de la sucesión de Fibonacci

b) ¿Cuáles son pares? ii- ¿Qué lugar ocupan en la sucesión? iii- ¿Qué significa que un número ocupe el segundo, tercero, cuarto o enésimo lugar en una sucesión?

c) ¿Cuáles son múltiplos de 3? ii- ¿Qué lugar ocupan en la sucesión?

d) Realiza el mismo análisis con los múltiplos de 5, 8 y 13 ¿Por qué se eligieron estos números?

e) Si hallas alguna regularidad, exprésala en palabras.

f) A modo de ayuda y como resumen de lo obtenido, completa el siguiente cuadro agregando más filas y columnas:

Lugar que ocupan	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Términos de la suc.	1	1	2	3	5	8	13	21	34
¿Múltiplo de 2?	no	no	sí	no	no	sí	no	no	sí
¿Múltiplo de 3?	no	no	no	sí	no	no	no	sí	no

Ya sabemos que cada término de la sucesión de Fibonacci es divisor de infinitos números de la sucesión. Pero,

a)¿Qué sucede con los números que no son términos de la sucesión de Fibonacci? ¿Hay múltiplos de 4?, ¿y de 6?, ¿y de 7? Observa hasta los múltiplos de 10. ¿Te animas a extraer alguna conclusión?

La realidad es que hay infinitos números de la sucesión de Fibonacci que son múltiplos de cada número entero elegido. ¿No te parece sorprendente?

Resultados

En el EJERCICIO 1 el 100% de los alumnos construye el árbol genealógico de una abeja macho, indicando la cantidad de padres, abuelos, bisabuelos, tatarabuelos y choznos. El 100% escribe la sucesión, aunque un 30% afirma que "va aumentando de una forma no regular" pero no encuentran la ley de formación. Un 25% obtiene la ley de formación que expresa con palabras.

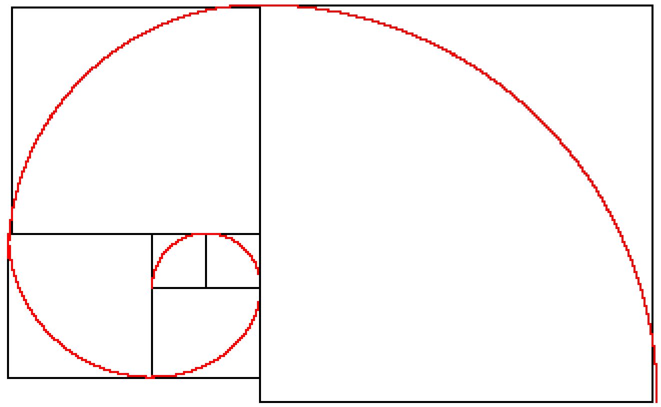
El 100% de los alumnos construye el árbol genealógico de una abeja hembra. El 100% escribe la sucesión. Cuando se les pregunta si hay similitudes entre ambas sucesiones, un 20% afirma que ambas son crecientes, 2 alumnos dicen que "la similitud es que la hembra tiene la cantidad siguiente al macho", 1 alumno afirma que "la segunda es mayor que la primera".

El 100% de los alumnos arma el árbol genealógico propio, un 10 % lo hace con los nombres de los familiares. El 30% escribe la sucesión de las potencias de 2, otro 30% lo expresa con palabras. Al intentar dar una fórmula para el término general un 15% escribe " 2 . x ".

Solamente dos alumnos intentan dar una fórmula para el término general de la sucesión de Fibonacci y escriben " x + (x + 1) ".

En el EJERCICIO 2 les resultó complicado empezar a construir los cuadrados ya que no se daban cuenta de cómo disponerlos. Una vez que los ubicaron, se dieron cuenta que tenían que cambiar la disposición para poder construir la espiral.

Un 35% no supo justificar por que se los llama rectángulos de Fibonacci, un 65% afirmó que era porque "sus lados coinciden con los términos de la sucesión". Algunos dicen que "es una sucesión de cuadrados". El 100% construye la espiral aunque un porcentaje reducido (5%) confunden la diagonal del cuadrado con un cuarto de circunferencia.



En el EJERCICIO 3 no tienen dificultad para escribir los términos de la sucesión ni en el reconocimiento de los múltiplos. Asimismo, saben ubicar el lugar que ocupan en la sucesión y reconocen la regularidad que verifican.

Algunos toman la sucesión { 1, 2, 3, 5, 8, ...} en este caso la regularidad la observan a partir del primer múltiplo que encuentran.

En cambio los que consideran la sucesión { 1, 1, 3, 5, 8, ...} afirman que los pares están en los lugares múltiplos de 3, los múltiplos de 3 en los lugares múltiplos de 4, etc. En este caso resulta más directa la relación de los múltiplos con el lugar que ocupan.

Cuándo se les pregunta “¿Por qué se eligieron los múltiplos de 2, 3, 5, 8, ...?”, en su mayoría responden porque presentan alguna regularidad “van de 3 en 3”, “van de 6 en 6”, pero muy pocos los relacionan con los términos de la sucesión de Fibonacci.

Cuando se les pregunta “¿Qué sucede con los números que no son términos de la sucesión de Fibonacci?”, afirman que hay múltiplos de 4, de 6 , de 7, etc., pero no cumplen ninguna regularidad.

Conclusiones

Según L. A. Santaló (1993), lograr interesar al alumno en los problemas y métodos de la matemática es el primer objetivo de su enseñanza. Por otra parte, sostiene Santaló, si bien hay que enseñar a razonar correctamente, ello debe hacerse sobre la base de ejemplos no evidentes.

Leopoldo Varela (1996) manifiesta que es conveniente que cada aprendizaje se vaya completando y perfeccionando a través de sucesivas aproximaciones, cada vez más profundas, desde distintas perspectivas y en distintas oportunidades, en la medida en que el desarrollo intelectual del alumno lo permita.

Alentadas por el pensamiento de estos próceres de la matemática, intentamos transitar distintos campos conceptuales a través de la sucesión de Fibonacci, dada la "magia" y la riqueza de estos números.

Bibliografía

ALSINA, C. (2000): *La matemática hermosa,* <http://www.upc.edu/ea-smi/personal/claudi/documents/matematica_hermosa.pdf>.

BAGNI, G. (2001): La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental en la educación media superior. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Thomson-Learning. 4 (1), pp. 45-61.

BIOGRAFÍA DE FIBONACCI:

<http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/mate4k.htm>.

FURINGHETTI, F., y SOMAGLIA, A. (1997): *Storia della matematica in classe.*L´educazione matematica, XVIII, V, 2, 1, pp. 43.

KNOTT, R.: *The Fibonacci Numbers and the Golden Section.* Dir. en Internet <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/ Fibonacci/fib.html>.

SANTALÓ, L. (1993): Matemática I. Iniciación a la creatividad. Editorial Kapelusz.

VARELA, L., *et al.* (1996): *Matemática-Metodología de la Enseñanza.* PROCIENCIA-Conicet. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, pp.136.

Correo electrónico minnaard@uolsinectis.com.ar vjcondesse@hotmail.com